Exposé 65 : Fonction reciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Exemple.

Pre requis :

- notion d'intervalle
- bijection
- continuité et derivabilité d'une fonction
- theoreme des valeurs intermediaires

dans tout l'exposé, I designe un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On note $C_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues et strictement monotones sur I.

1) Fonction reciproque

Theoreme : Si $f \in C_m(I)$ alors f realise une bijection sur $f(I)$

Preuve : $f(I)$ est un intervalle d'apres le theoreme des valeurs intermédiaires
$f : I \to f(I)$ est surjective par construction
Soit $(x_1, x_2) \in I^2$, supposons f strictement croissante (on change le sens des inegalité si elle est strictement decroissante, ou on considere $-f$ qui sera alors strictement croissante)
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ donc f injective.

Definition : Soit $f \in C_m(I)$. L'application qui a tout $y \in f(I)$ associe son unique antecedent par la fonction f est appelée fonction reciproque de f . On la note f^{-1}

Remarque :

$$\begin{pmatrix} y = f(x) \\ x \in I \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{pmatrix}$$

Si $f \in C_m(I)$ alors $f^{-1} \circ f = Id_I$ et $f \circ f^{-1} = Id_{f(I)}$

Preuve (si le jury le demande)
$x \in I, y \in f(I)$ tel que $y = f(x); x = f^{-1}(y)$
$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1} \circ f = Id_I$

2) Propriete de la fonction reciproque

a) Sens de variation

Proposition : Si $f \in C_m(I)$ alors f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .